数理解析研究所講究録
580巻 1986年 59-69

有限群の表現論における Auslander-Reiten 理論

大阪大 理 宇野 勝博 (Katsuhiro Uno)

多元環の表現論において有効な手段を与える Auslander-Reiten の理論は、最近、群環の場合に適用され興味ある結果を得ている。この理論のポイントは、加群を加群の圏より広いある圏の射影的対象として認識することであると言える。J. A. Green は、群環に対するこの広い圏を考察し、特に部分群との関係を調べ、群環上の加群の圏の持つ多くの興味ある概念をこの広い圏に拡張し、いくつかの結果も導いた。ここでは、その内容を簡単に紹介し、更に、Clifford 理論などとの関連について調べたことを報告する。

I、J. A. Green の論文

以下では、G を有限群、k を標数 p $(p>0)$ の体とする。kG-加群はすべて k 上有限次元の右加群とし、$\mathrm{Hom}_{kG}(V_1, V_2)$ を簡単のため、$_G(V_1, V_2)$ と書く。kG-加群達の圏 $\mathrm{Mod}(kG)$ の対象 V に対し、$_G(\cdot, V)$ は自然に $\mathrm{Mod}(kG)$ から $\mathrm{Mod}(k)$ への k-linear contravariant functor となる。k-linear contravariant functor 達の圏を $\mathrm{MMod}(kG)$、射影次元2以下の対象からなる $\mathrm{MMod}(kG)$ の部分圏を $\mathrm{mMod}(kG)$ と書く。このとき、$V \to {}_G(\cdot, V)$ は $\mathrm{Mod}(kG)$

から MMod (kG) への covariant functor を与え、これにより、Mod (kG) は MMod (kG) へ“うめ込める”。更に、$_G(\cdot, V)$ は射影的である。MMod (kG) の対象には自然に部分対象、商対象、既約、直既約など、加群に対してある概念を定義できる。このとき、既約な対象 SV は次のいずれかの射影分解をもつ。

(i) $0 \to {}_G(\cdot, \Omega^2 V) \to {}_G(\cdot, X) \to {}_G(\cdot, V) \to SV \to 0$,

ここで、V は非射影的直既約加群、$0 \to \Omega^2 V \to X \to V \to 0$ は、Auslander-Reiten 列、Ω は Heller 作用素である。

(ii) $0 \to {}_G(\cdot, \mathrm{rad}\, V) \to {}_G(\cdot, V) \to SV \to 0$,

ここで、V は射影的直既約加群、$\mathrm{rad}\, V$ は V の radical である。

この様に、MMod (kG) の既約な対象 SV は Mod (kG) の直既約な対象 V と 1 対 1 に対応する。更に、既約な対象 SV はすべて mMod (kG) の対象である。ここで、念のため、Auslander-Reiten 列 (A-R 列) の定義を復習しておく。

<u>定義</u>. 短完全列 $0 \to V_1 \to V_2 \xrightarrow{\sigma} V_3 \to 0$ が A-R 列 とは.

(i) $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ は分裂列ではない、

(ii) V_1, V_3 は直既約、

(iii) kG-準同型 $f : U \to V_3$ が分裂する全射でなければ、$\exists g \in {}_G(U, V_2)$ で $f = \sigma \circ g$ となる、

のすべてが成立することである。このとき、$V_1 \cong \Omega^2 V_3$ となることが知られている。

J.A.Green は [2] において、次の様な概念を定義した。

(i) $H \leq G$ に対し、Mod(kG) での ind_H^G, res_H^G, conj の adjoint として MMod(kG) の Res_H^G, Ind_H^G, Conj を定義する。(ex. MMod(kG)の対象 F と Mod(kH) の対象 W に対し、$F_H(W) := F(W^G)$) これらの間には例えば Mackey 分解のような Mod(kG) で成立する式と同様な式が成り立つ。また Frobenius 相互律により $({}_G(\cdot, V))_H \cong {}_H(\cdot, V_H)$ が導かれる。

(ii) mMod の中のみで考えて、相対射影性を考えることができる。mMod(kG) の対象 F が H-projective $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $F \mid F_1^G$ となる mMod(kH) の対象が存在する。

また、$\mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{End}(F_H) \to \mathrm{End}(F)$ も定義され、Higman の判定条件も mMod で成立する。直既約な対象には vertex, source も定義される。(vertex は up to conj. で一意的に決まる p-群、etc...)

これらに関し、彼は例えば次の様な結果を得ている。

(kG-加群 V に対し、$\delta_G(V) := \dim_k(\mathrm{End}_{kG}(V) / \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_{kG}(V))$。)

① $H \trianglelefteq G$, V を直既約 kG-加群とする。$V_H = s_1 W_1 \oplus \cdots \oplus s_n W_n$, W_i; 直既約とすると、$(SV)_H$ は semisimple で $(SV)_H \cong r_1(SW_1) \oplus \cdots \oplus r_n(SW_n)$, ここで $r_i = (\delta_G(V) / \delta_H(W_i)) \times$ "V の W_i^G における重複度"。

② 直既約 kG-加群 V に対し、${}_G(\cdot, V)$ も直既約で、$\mathrm{vtx}\, V =_G \mathrm{vtx}({}_G(\cdot, V)) \leq_G \mathrm{vtx}(SV)$。

③ 直既約 kG-加群 V に対し、$P=\mathrm{vtx}\,V$, U を V の P-source とする。I を U の $N_G(P)$ 中の inertia 部分群とすると、$\mathrm{vtx}(SV)\leq I$ が成立する。

④ G が p-群、k が十分大なら $\mathrm{vtx}(SV)=I$。

II、以下では、上の J. A. Green の結果に付け加えるべき結果、及び Clifford 理論も用いて得られた SV に関する結果を述べる。

1、F を $\mathrm{mMod}(kG)$ の直既約な対象とする。$0\to {}_G(\cdot,V_1)\xrightarrow{f}{}_G(\cdot,V_2)\xrightarrow{g}{}_G(\cdot,V_3)\xrightarrow{h}F\to 0$ を F の射影分解とする。$a\in(kG)^H$ (H で centralize される kG の元) は、自然に $\mathrm{End}_{kH}(V_i)$ の元を誘導し、これは更に $\mathrm{End}\left(({}_G(\cdot,V_i))_H\right)$ の元 $\bar{a}$ を誘導する。このとき、次の可換図式により $\mathrm{End}(F_H)$ の元 a^* が定まる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_G(\cdot,V_1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{a}"] & {}_G(\cdot,V_2) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{a}"] & {}_G(\cdot,V_3) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\bar{a}"] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "a^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_G(\cdot,V_1) \arrow[r, "f"] & {}_G(\cdot,V_2) \arrow[r, "g"] & {}_G(\cdot,V_3) \arrow[r, "h"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(これは F の射影分解のとり方に依存しない。)このことから特に、$Z(kG)$ の巾等元を作用させることにより、各 V_i をある同じ block B に属するように取ることができ、これを用いて F の属する block B を定義できる。即ち、$e^*=\mathrm{Id}_F$ となる $Z(kG)$ の原始巾等元 e がただ一つ存在し、ekG をもって F の

属する blockと定める。また、$Tr_H^G : (kG)^H \to (kG)^G$ を trace map とすると、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} {}_G(\cdot, V_3) & \xrightarrow{h} & F & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow \overline{Tr_H^G(a)} & & \big\downarrow Tr_H^G(a^*) & & \\ {}_G(\cdot, V_3) & \xrightarrow{h} & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このことから、Mod(kG) の場合と全く同様に、"$vtx(F) \leq_G$ Fの属する block の defect群" が得られる。特に、直既約 kG-加群 V に対して、V と SV は同じblockに属することが容易に確かめられるので、$vtx(SV) \leq_G$ "Vの属するblockのdefect群" が成立する。同様に、$(kG)^H$ の作用のみを用いて示される Mod(kG)の結果は、すべて mMod(kG)で成立する。

以下では $N \trianglelefteq G$ とする。(Vを直既約 kG-加群、$P = vtx\, V \neq 1$、Uを $(G, N_G(P), P)$ に関する Vの Green 対応とすると、$vtx(SV) = vtx(SU)$, $(SU)^G = SV$ となる。(例えば [2, §7]。) 従って、いくつかの問題は $N \trianglelefteq G$, $N = vtx\, V$ の場合に帰着できる。)

2、Vを非射影的直既約加群とする。このとき、SVの拡張可能性について調べる。Vは G-不変と仮定する。

SV に対して $(SW)_N = SV$ となる直既約 kG-加群 W, $W | V^G$ が存在するための必要十分条件は、I-① により、a_W を

WのV^G中の重複度とすると、$a_W\delta_G(W)=\delta_N(V)$となるWが存在することである。ここでClifford理論を用いると、Nへ制限して$V\oplus\cdots\oplus V$と同型となるkG-加群（例えば上のW）の様子はすべて$E=\mathrm{End}_{kG}(V^G)$-加群で$E_1=\mathrm{End}_{kN}(V)\underset{\otimes 1}{\hookrightarrow}E$に制限して射影加群となるものの様子と同等であるから、上のことは、$a_Y\delta_E(Y)=\delta_{E_1}(E_1)$を満たす直既約射影的E-加群Yの存在と同値となる。（a_YはYのEにおける重複度）このことは、更に$E\supset E_1$での中山 relationを考えると、既約E_1-加群$E_1/\mathrm{rad}\,E_1$がEへ拡張可能なための条件に他ならない。Clifford理論によれば、VのGへの拡張可能性とE_1のEへの拡張可能性は同値であり、更に後者は$E_1/\mathrm{rad}\,E_1$のEへの拡張可能性を導くので次の定理を得る。

<u>定理</u>　上の仮定のもとで、VがGへ拡張可能なら、SVもGへ拡張可能である。

更にkが十分大きく、$E_1/\mathrm{rad}\,E_1\cong k$となっているときは、Eを両側イデアル$I=E(\mathrm{rad}\,E_1)=(\mathrm{rad}\,E_1)E$でわった環、$\overline{E}=E/I$が$\overline{G}=G/N$の$k$上のtwisted群環となる。このとき、既約加群の拡張可能性に関して良く知られている結果と同様な次の事が成立する。

定理 (i) 上の様な W が存在するための必要十分条件は $\bar{E}$ が群環 (twisted でない) となることである。

(ii) このとき更に、上の様な W の同型類の個数は $\bar{E}$ の 1 次元表現の個数に等しい。

注意 (i) G/N が p'-群のときは. $\bar{E}$ が twisted でない群環になることは、V の G への拡張可能性と同値である [4]。

(ii) (先に述べた定理の証明の概略からもすぐわかるが、) G/N が p-群のときは $S(V^G)$ が正しく SV の拡張である。

このように、V と SV の関係は、E (E_1)- 加群においては principal indecomposable と irreducible の関係として、実際に加群の関係として取り扱うことができる。

3、 2 と同じ状況で、やはり、V は G-不変、k は十分大とする。

任意の短完全列 $S: 0 \to V_1 \to V_2 \xrightarrow{\sigma} V_3 \to 0$ (V_i ; kG-加群) に対し、$\sigma_* : {}_G(V^G, V_2) \to {}_G(V^G, V_3)$ の coker を $V^G \cdot S$ と表わす。これは自然に E- 加群となる。即ち ${}_G(V^G, V_2) \xrightarrow{\sigma_*} {}_G(V^G, V_3) \to V^G \cdot S \to 0$ は E-加群の完全列。このとき、次の事が成り立つ。

<u>定理</u>　WをV^Gの直既約直和因子とする。$N \leq M \leq G$ なるMに対してSWがM-projectiveなら $V^G \cdot (SW)$ は $\bar{M} = M/N$-projective である。(ここでSWはWで終わるA-R列と同一視している。)

注意、上の様なWに対し、$V^G \cdot (SW)$にはIがtrivialに作用することがA-R列の定義より容易にわかる。従って $V^G \cdot (SW)$ は$\bar{E} = E/I$-加群と考えられる。(twisted群環における相対的射影性の定義は、例えば[1]で与えられている。)

G/Nがp-群のとき、$V^G \cdot (S(V^G))$にrad$E$がtrivialに作用することが、やはりA-R列の定義よりわかるので、次の系を得る。

<u>系</u>　G/Nがp-群なら$S(V^G)$のvertexはG/Nをcoverする。

注意、I-④は、上の系、I-②、③より導かれる。

定理の証明には、次の事が本質的である。

・XをkM-加群、$E_M = \mathrm{End}_{kM}(V^M)$ ($\hookrightarrow E$) とすると

$$“\ {}_M(V^M, X) \otimes_{E_M} E \cong {}_G(V^G, X^G) \quad \text{as } E\text{-modules.}”$$

(このことは、VがG-不変でないときは一般に成立しない。)

4、最後に SV を G へ induce した短完全列について調べた事を述べる。(この項の結果は阪市大の奥山先生の御示唆による。また、シンポジウムでは発表しなかった結果である。)

やはり2、と同じ状況で、kが十分大きいとする。$e_1, \cdots e_n$をEの直交する原始巾等元、$W_i = e_i V^G$ とする。このとき、$V^G = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ に応じて $(SV)^G$ も分解する。即ち:

<u>定理</u> 各iに対し短完全列 $0 \to \Omega^2 W_i \to Y_i \to W_i \to 0$ が存在し、その直和 $0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^2 W_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} W_i \to 0$ は $0 \to (\Omega^2 V)^G \to X^G \to V^G \to 0$ と同型となる。(ここで、$SV: 0 \to \Omega^2 V \to X \to V \to 0$ はA-R列) また、この分解は、一意的に定まる。

<u>注意</u> $N \trianglelefteq G$より $(\Omega^2 V)^G \cong \Omega^2 (V^G)$ であり、$\bigoplus_i \Omega^2 W_i \cong (\Omega^2 V)^G$ となっている。

各iに対し、上の定理での短完全列 $0 \to \Omega^2 W_i \to Y_i \to W_i \to 0$ をS_iで表わす。VをG-不変とすると、$V^G \cdot S_i$ にはやはりIがtrivialに作用し、$V^G \cdot S_i$ はE-加群と考えられる。上の定理から容易に $V^G \cdot S_i$ は射影的E-加群 $e_i E / e_i I$に同型なことがわかる。(特に、各 S_i は non-splitである。) 一方、$V^G \cdot SW_i$ は既約E-加群 $e_i E / e_i (\mathrm{rad}\, E)$ に同型であることを用いて、

$$S_i \text{ が A-R 列} \iff e_iE/e_iI \text{ が既約 } \bar{E}\text{-加群}$$

を得る。($\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ も S_i がA-R列かどうかは、本質的に $V^G\cdot S_i$ への e_iEe_i の作用のみで決定されることから従う。) 応用として、次の Knörr [3, 3.1] と類似の結果を得る。

系 N を p-群、$H=N_G(N)$、B を W_i の属する block とする。このとき、もし、S_i がA-R列なら B に cover される H の block は N を defect 群としてもつ。

実際、Knörr の結果の証明の本質的な部分は e_iE/e_iI が既約になるという事である。Knörr は S_i に関する仮定の代わりに、"$J\,\mathrm{End}_{kG}(W_i)=\sum_{K\lneqq_G \mathrm{vtx}(W_i)} \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_K^G(\mathrm{End}_{kK}(W_i))$" を仮定しているが、次の事実から、系の仮定の方が弱いことがわかる。

∘ W を直既約 kG-加群、$J\,\mathrm{End}_{kG}(W)=\sum_{K\lneqq_G \mathrm{vtx}(W)} \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_K^G(\mathrm{End}_{kK}(W))$ とする。このとき、短完全列 $S: 0\to\Omega^2W\to Z\to W\to 0$ がA-R列であるための必要十分条件は、

(i) S が non-split, かつ

(ii) S は K-split $\quad {}^\forall K\lneqq_G \mathrm{vtx}(W)$

である。

(S_i は、その作り方から、上の(i)(ii)の条件を満足するので、Knörr の仮定のもとでは、A-R列になっている。)

最後に、SW_i の vertex に関する次の系を述べる。

系　上の状況で、$\mathrm{vtx}(SW_i) \leq N$ ならば、$S_i \cong SW_i$ となり、特に、SW_i の中央の項も N-projective である。

注意、Green 対応の理論を用いて、上の系は、"非射影的直既約 kG-加群 W が $\mathrm{vtx}\, W = \mathrm{vtx}(SW)$ を満たせば、SW の中央の項は、$\mathrm{vtx}\, W$-projective" と拡張できる。この事自身は [2、§8] の特別な場合であるが、定理を用いると、SW の中央の項が、実際、W の source U の A-R 列 SU の中央の項を induce したときに現われる、という事もわかる。

References

[1] Conlon S. B.: Twisted Group Algebras and Their Representations. J. Austral. Math. Soc. 4 (1964) 152-173.

[2] Green J. A.: Functors on Categories of Finite Group Representations. J. of Pure and Applied Algebra 37 (1985) 265-298.

[3] Knörr R.: On the Vertices of Irreducible Modules. Annals of Math. 110 (1979) 487-499.

[4] Thévenaz J.: Extensions of Group Representations from a Normal Subgroup. Comm. Algebra 11 (1983) 391-425.